

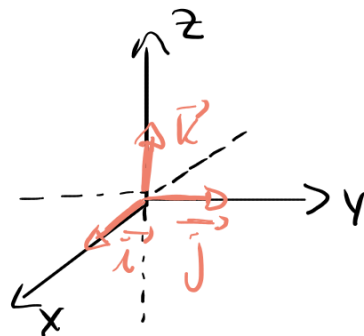
CONSEJO: Para estudiar geometría es importante **DIBUJAR**, hay que visualizar lo que nos piden y hacemos.

Bloque Geometría Resumen (2º Bto)

VECTORES

→ indica que es un vector.

$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) \rightarrow \text{coordenadas en el espacio}$$



MÓDULO $\rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$

$$\vec{U} = (U_1, U_2, U_3) \quad \vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$$

$\vec{U}$ y $\vec{V}$ son **linealmente dependientes** = **proporcionales** = uno se escribe como **combinación lineal** del otro

$$\vec{U} = k \cdot \vec{V} \quad \text{o bien,} \quad \frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2} = \frac{U_3}{V_3}$$

PUNTOS ALINEADOS

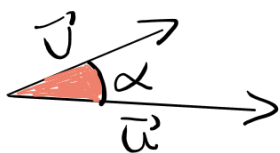
$\rightarrow$ **NOTA:** $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$ están alineados si $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son proporcionales:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} = \frac{b_3 - a_3}{c_3 - a_3}$$

PRODUCTO ESCALAR

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| |\vec{V}| \cdot \cos \alpha$$



$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_1 \cdot V_1 + U_2 \cdot V_2 + U_3 \cdot V_3$$

Si $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son perpendiculares $\Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$
($\vec{U} \perp \vec{V}$)

NOTA: ORTOGONAL = PERPENDICULAR

PRODUCTO VECTORIAL $\rightarrow$ $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$

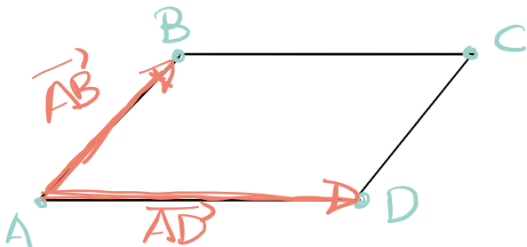
$\alpha =$ MENOR ángulo que determinan los dos vectores.

$\downarrow$ Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos $\rightarrow$ $\vec{u} \times \vec{v} = 0$
 $(\vec{u} \parallel \vec{v})$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

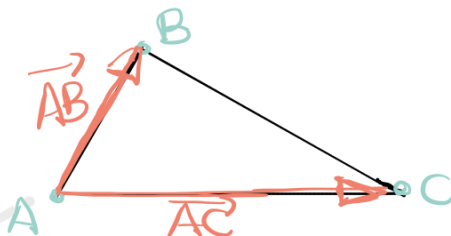
ÁREAS FIGURAS PLANAS

PARALELOGRAMO



$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

TRIÁNGULO



$$\text{Área} = \left| \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{2} \right|$$

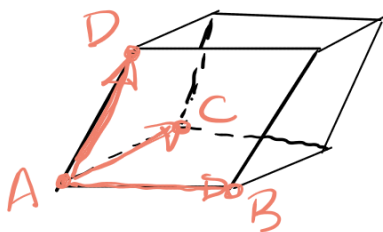
PRODUCTO MIXTO $\rightarrow$ $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

$\downarrow$ Si los vectores son coplanares (linealmente dependientes) $\rightarrow$ $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

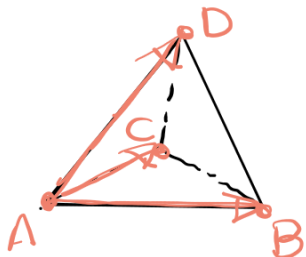
VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO $\rightarrow$

$$V = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$$



VOLUMEN DE UN TETRAEDRO $\rightarrow$

$$V = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}$$



RECTA $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ punto de la recta:

Ec vectorial $\rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3), \lambda \in \mathbb{R}$

Ecs paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot v_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Ec. continua $\rightarrow \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

$$A'x + B'z + C' = 0$$

Ecs implícitas

PLANO $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$

Ec vectorial:

$$\pi \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ecs paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

No hay ec. continua

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Ec implícita

Vector normal $\rightarrow \boxed{\vec{n} = (A, B, C)}$

$\hookrightarrow \perp \pi$ (perpendicular al plano)

POSICIONES RELATIVAS DE 2 RECTAS

$$r: \begin{cases} A(a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad s: \begin{cases} B(b_1, b_2, b_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$$

Rectas coincidentes $\rightarrow \text{Rango}(\vec{u}', \vec{v}', \vec{AB}) = 1$

o bien, $\vec{u}' \times \vec{v}' = 0$ y $\vec{u}' \times \vec{AB} = 0$

Rectas paralelas $\rightarrow \text{Rango}(\vec{u}, \vec{v}') = 1$

$$\text{Rango}(\vec{u}', \vec{v}, \vec{AB}') = 2$$

o bien, $\vec{u}' \times \vec{v}' = 0$ pero $\vec{u}' \times \vec{AB} \neq 0$

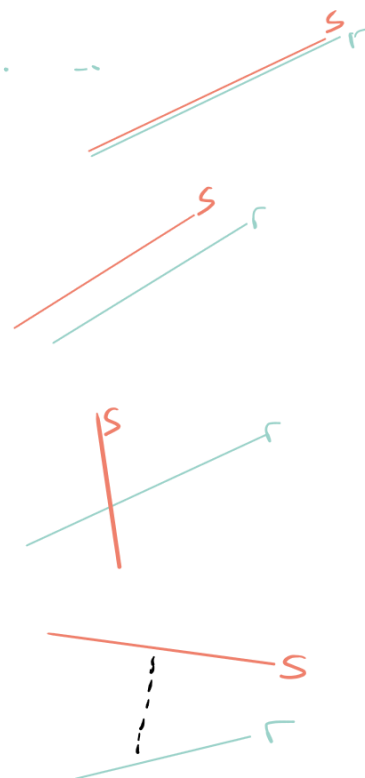
Rectas secantes $\rightarrow \text{Rango}(\vec{u}', \vec{v}') = 2$

$$\text{Rango}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 2$$

o bien, $\vec{u}' \times \vec{v}' \neq 0$ pero $[\vec{AB}, \vec{u}', \vec{v}'] = 0$

Rectas que se cruzan $\rightarrow \text{Rango}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 3$

o bien, $\vec{u}' \times \vec{v}' \neq 0$ y $[\vec{AB}, \vec{u}', \vec{v}'] \neq 0$



POSICIONES RELATIVAS RECTA Y PLANO

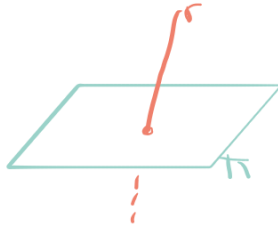
$$r: (x, y, z) = \underbrace{(p_1, p_2, p_3)}_P + \lambda \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{\vec{v}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \vec{n}' = (A, B, C)$$

$\vec{v}' \rightarrow$ vector director recta $\vec{n}' \rightarrow$ vector normal plano.

$P \rightarrow$ punto de la recta

Recta y plano $\rightarrow \vec{v}' \cdot \vec{n}' \neq 0$
secantes



Recta y plano $\rightarrow \vec{v}' \cdot \vec{n}' = 0$
paralelos

$P \notin \pi$ (el punto no pertenece al plano)



Recta contenida $\rightarrow$
en el plano

$$\vec{v}' \cdot \vec{n}' = 0$$

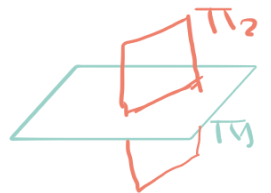
$P \in \pi$ (el punto sí pertenece al plano)



POSICIONES RELATIVAS 2 PLANOS

$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \quad \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Planos secantes $\rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$



Planos paralelos $\rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$



Planos coincidentes $\rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$



Ángulos

• entre 2 rectas: $\cos \alpha = \frac{|\vec{u}' \cdot \vec{v}'|}{|\vec{u}'| |\vec{v}'|} \rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{u}' \cdot \vec{v}'|}{|\vec{u}'| |\vec{v}'|} \right)$

• entre recta y plano

$\vec{u}'$ vector director de la recta
 $\vec{n}'$ vector normal del plano

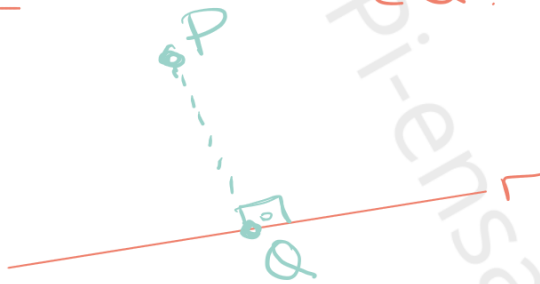
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}' \cdot \vec{n}'|}{|\vec{u}'| |\vec{n}'|} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{u}' \cdot \vec{n}'|}{|\vec{u}'| |\vec{n}'|} \right)}$$

• entre 2 planos

$\vec{n}_1$ vector normal de π_1 y $\vec{n}_2$ vector normal de π_2

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right)}$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA



$$P(p_1, p_2, p_3)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + d v_1 \\ y = y_0 + d v_2 \\ z = z_0 + d v_3 \end{cases}$$

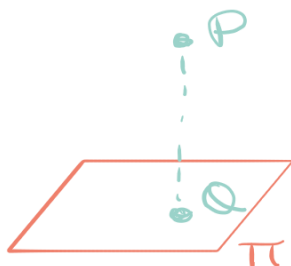
① Sabemos que $Q \in r$, entonces: $\begin{cases} q_1 = x_0 + d v_1 \\ q_2 = y_0 + d v_2 \\ q_3 = z_0 + d v_3 \end{cases}$

② $\overrightarrow{PQ} \perp r$ por lo que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}' = 0$

③ Sustituimos $\begin{cases} q_1 = x_0 + d v_1 \\ q_2 = y_0 + d v_2 \\ q_3 = z_0 + d v_3 \end{cases}$ en $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}' = 0$, obteniendo

así el valor de d . Sustituimos este valor en r y obtenemos las coordenadas de Q . //

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE EL PLANO

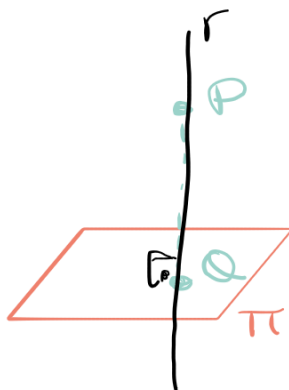


$$P(p_1, p_2, p_3)$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

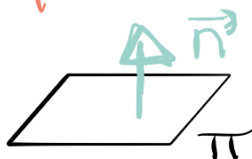
1º Hallamos r que pasa por P y es $\perp$ a π

Para ello: $r: \begin{cases} \vec{n} = (A, B, C) \\ P(p_1, p_2, p_3) \end{cases}$



¿Por qué r se forma con el vector normal del plano?

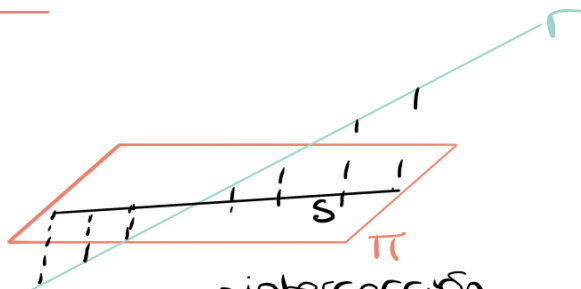
El vector normal del plano va de la siguiente forma:



2º Q es la intersección de r y π , por lo que sustituyendo en (x, y, z) de π con $r: \begin{cases} x = p_1 + \lambda A \\ y = p_2 + \lambda B \\ z = p_3 + \lambda C \end{cases}$ obtenemos una ecuación de donde sacamos el valor de λ .

Luego Q será $\begin{cases} x = p_1 + \lambda A \\ y = p_2 + \lambda B \\ z = p_3 + \lambda C \end{cases}$ con ese valor de λ .

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO



1º Obtener $r \cap \pi = P \rightarrow$ se hace como el paso 2º anterior.

2º Calculamos la proyección de un punto Q de r sobre el plano π .

3º Obtenemos la ec de la recta que pasa por P y Q .
(con el vector $\overrightarrow{PQ}$ y uno de los puntos)

PUNTOS SIMÉTRICOS

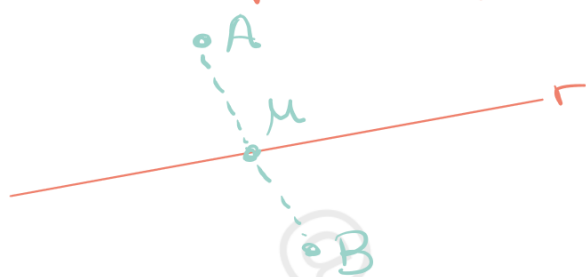
Simétrico de un punto respecto a otro.

Es el punto medio:

$$\begin{matrix} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} M \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2} \right) \end{matrix} \right.$$

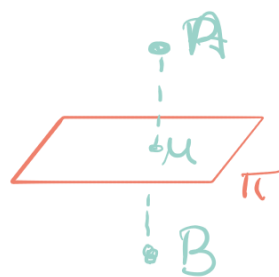


Simétrico de un punto respecto de una recta



- 1º Determinar la proyección de A sobre la recta r, lo que nos dará el punto medio (con respecto a $\overline{AB}$)
- 2º Hallar B teniendo en cuenta el apartado anterior (simétrico de un punto respecto a otro)

Simétrico de un punto respecto de un plano



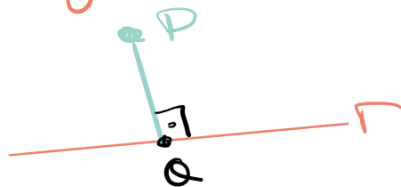
- 1º Determinar la proyección de A sobre el plano, lo que nos dará el punto medio M.
- 2º Hallar B como en el anterior apartado.

DISTANCIAS

• Entre 2 puntos: $d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$



• Entre un punto y una recta $d(P, r)$

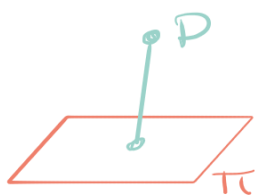


1° Sea $Q(x, y, z) \in r$, $\overrightarrow{PQ}$ debe ser perpendicular a r , es decir, $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ con esto obtenemos Q .

2° $d(P, r) = d(P, Q)$.

• Entre un punto y un plano

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad P(p_1, p_2, p_3)$$



$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• Entre dos rectas: $r: \begin{cases} \vec{u}(u_1, u_2, u_3) \\ A(a_1, a_2, a_3) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{cases}$

Si son coincidentes o secantes $\rightarrow d(r, s) = 0$

Si son paralelos

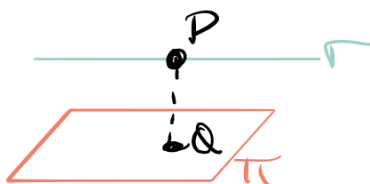
$$d(r, s) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}$$

Si se cruzan $\rightarrow d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

• Entre una recta y un plano:

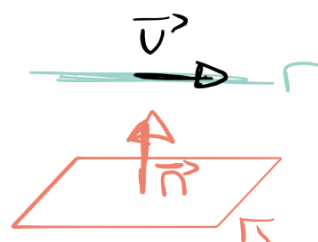
Si la recta está contenida o corta al plano $\Rightarrow d(r, \pi) = 0$

Si son paralelos entonces $d(r, \pi) = d(P, \pi)$



NOTA: Para comprobar que son paralelos:

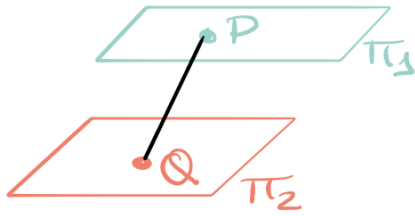
$$\vec{n} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$



• Entre dos planos.

Si son coincidentes o secantes: $d(\pi_1, \pi_2) = 0$

Si son paralelos: $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = d(\pi_1, Q)$



@Pi-ensamientos