

Integración Por Partes

Lo usamos para resolver integrales que están formados por el producto de dos funciones.

Sea $u(x)$ una función y su derivada la escribimos como du .

Sea $v(x)$ otra función y su derivada la escribimos como dv .

Fórmula:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

TRUCCO: "un día vi una vaca vestida de uniforme"

¿Qué función escogemos como u y v ?

TRUCCO: Para escoger u seguiremos este orden:

(ALPES)

A → Funciones Arco (arco seno, arco coseno, arco tg)

L → Logaritmos

P → Potencias

E → Exponenciales

S → Seno y coseno

¿Por qué este orden?

Damos prioridad a las funciones arco y los logaritmos para ser u porque su integral inmediata NO EXISTE, por eso nos interesa derivarlas.

Ejemplo: $\int u dv = u \cdot v - \int v du$

$$\int x \ln(x) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2x} dx =$$

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv &= x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \text{ constante}$$

Deducción de la fórmula

Tenemos las funciones $u(x)$ y $v(x)$. Vamos a derivar su producto:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Integramos ambos lados de la igualdad anterior:

$$\int [u(x)v(x)]' dx = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx$$



$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

Ahora pasamos $\int u'(x)v(x) dx$ al otro lado de la igualdad y obtenemos:

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x)v(x) dx = \int u(x)v'(x) dx$$

que es lo que queríamos:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

//

Integrales Racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{donde } P(x) \text{ y } Q(x) \text{ son polinomios.}$$

Hay dos casos que podemos encontrarnos:

Caso 1 $\rightarrow$ **Grado $P(x) \geq$ Grado $Q(x)$**

① Hacemos la división de $P(x)$ entre $Q(x)$.

$$\begin{array}{r} P(x) : Q(x) \\ \hline R(x) \quad C(x) \end{array}$$

Resto $\leftarrow$ $\rightarrow$ Cociente

② Con la división hecha, la integral será la siguiente:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Caso 2 $\rightarrow$ **Grado $P(x) <$ Grado $Q(x)$**

① Factorizamos el polinomio $Q(x)$:

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_n)^{k_n}$$

② Podemos expresar el cociente como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)} + \dots$$

donde desconocemos los valores de $A, B, \dots$

⑤ Resolvamos los valores de $A, B, \dots$ y hacemos la integral como sigue:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a_1)} dx + \int \frac{B}{(x-a_2)} dx \dots$$

Ejemplos:

CASO 1

$$\int \frac{\overset{P(x)}{2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10}}{\underset{Q(x)}{x^2 - 5}} dx$$

Grado $P(x) \geq$ Grado $Q(x)$

Realizaremos la división de polinomios:

$$\begin{array}{r} 2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10 \quad \text{---} \quad x^2 - 5 \\ \underline{-2x^5 + 10x^3} \quad \downarrow \quad 2x^3 - 2 \\ -2x^2 + 10 \quad \downarrow \\ \underline{+2x^2 - 10} \\ 0 \end{array}$$

División exacta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\frac{2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10}{x^2 - 5} = 2x^3 - 2 + \frac{0}{x^2 - 5}$$

$$\int \frac{2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10}{x^2 - 5} dx = \int (2x^3 - 2) dx =$$

$$= 2 \int x^3 dx - 2 \int dx = \frac{2x^4}{4} - 2x + C =$$

$$= \frac{x^4}{2} - 2x + C$$

CASO 2:

$$\int \frac{\overset{P(x)}{2x^2 + 5x - 1}}{\underset{Q(x)}{x^3 + x^2 - 2x}} dx$$

Grade $P(x) < \text{Grade } Q(x)$.

① Factorizamos $Q(x)$:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$$

$$\hookrightarrow x=1$$

$$\hookrightarrow x=-2$$

②

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$\boxed{x=0} \rightarrow -1 = -2A \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{x=1} \rightarrow 2+5-1 = B \cdot 1 \cdot 3 \rightarrow \boxed{B = \frac{6}{3} = 2}$$

$$\boxed{x = -2} \rightarrow 2 \cdot 4 + 5(-2) - 1 = C(-2)(-3)$$

$$\rightarrow -3 = +6C \rightarrow \boxed{C = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}}$$

③ Resolvamos la integral:

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int \frac{1/2}{x} dx + \int \frac{2}{x-1} dx$$

$$+ \int \frac{-1/2}{x+2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x| + 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + C$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL PASO 2º

②

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x^2 + x - 2) + B(x^2 + 2x) + C(x^2 - x)$$

$$\begin{cases} 2 = A + B + C \\ 5 = A + 2B - C \\ -1 = -2A \end{cases} \rightarrow \text{Resolvamos el sistema y sacamos } A, B \text{ y } C.$$

Integración Cambio de Variable

Este método lo usamos para obtener una integral más sencilla cuando tenemos una integral que no es inmediata ni podemos hacerla con los otros métodos.

Ejemplo:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx \quad \text{Cambio de variable: } \boxed{t=e^x}$$

1º Definimos el cambio de variable t y dt :

$$t=e^x$$

$$dt=e^x dx$$

2º Hacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = (*)$$

3º Obtenemos una integral inmediata que resolvemos:

$$(*) = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsen(t) + C = (*)$$

4º Deshacemos el cambio de variable $t=e^x$:

$$(*) = \arcsen(e^x) + C$$

Integral Definida

Área encerrada por $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y

$$g(x) = x + 1$$

$$\text{Área} = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Para obtener a y b , tenemos que hacer $f(x) - g(x) = 0$

$$-x^2 + 3x + 4 - (x + 1) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 3 \\ x = -1 \end{matrix}}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \right| =$$

$$= \left| \left(-\frac{27}{3} + 9 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right| =$$

$$= \left| 9 - \left(-\frac{5}{3} \right) \right| = \boxed{\frac{32}{3} u^2}$$