

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

• Dominio ($\text{Dom } f(x)$)

Los valores de $\mathbb{R}$ que puede tomar la x .

Estudiaremos para qué valores de la x la función no existe y así obtendremos los puntos fuera del dominio.

TIPOS DE FUNCIONES Y SU DOMINIO

• Polinómica: $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$

Dominio = $\mathbb{R} \rightarrow$ la función existe para cualquier valor de x .

• Racionales: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Dominio = $\mathbb{R} - \{\text{valores que hacen } Q(x) = 0\}$

Para $Q(x) = 0$ la función no existirá

• Radicales: $y = \sqrt[n]{F(x)}$

Dominio = $\mathbb{R} - \{\text{valores en los que } F(x) < 0\}$

Cuando $F(x) < 0$, la raíz es negativa y por tanto, la función no existirá.

• Exponencial: $y = e^{F(x)}$

Dominio: el de $F(x)$.

• Logarítmica: $y = \ln[F(x)]$

Dominio: $\mathbb{R} - \{\text{valores que hacen } F(x) \leq 0\}$

El $\ln 0$ o $\ln$ (número negativo) no existen.

• Trigonométricas:

$\left\{ \begin{array}{l} y = \sin(F(x)) \\ y = \cos(F(x)) \end{array} \right\}$ Dominio = el de $F(x)$

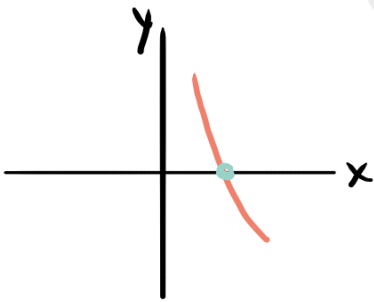
↳ $y = \operatorname{tg}(f(x)) \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$
ya que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ó $\operatorname{tg}(90^\circ)$ no existe.

• Imagen o recorrido ($\operatorname{Im} f(x)$)

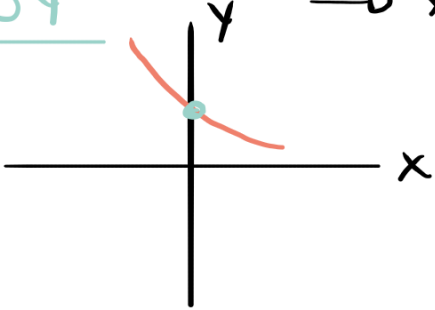
Los valores de $\mathbb{R}$ que toma la y ($=f(x)$)

• Puntos de corte

EJE OX $\rightarrow y=0 \rightarrow x=k \rightarrow \boxed{(k, 0)}$



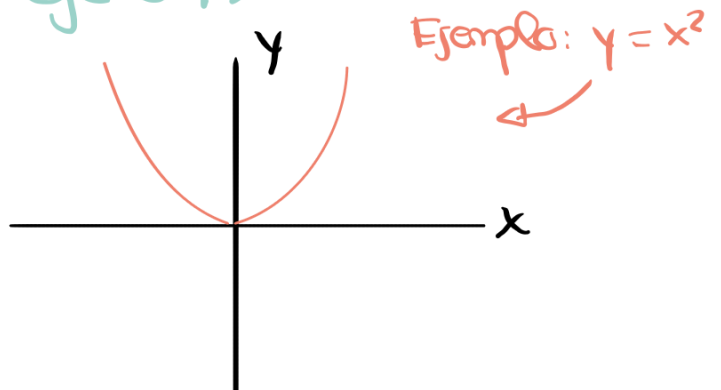
EJE OY $\rightarrow x=0 \rightarrow f(x)=k \rightarrow \boxed{(0, k)}$



• Simetrías

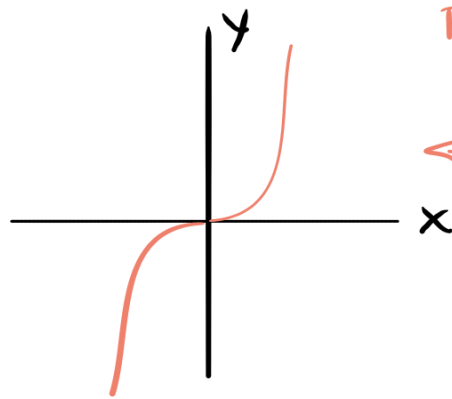
Simetría PAR (respecto al eje OY)

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$



Simetría IMPAR (respecto al origen O)

$$f(-x) = -f(x)$$



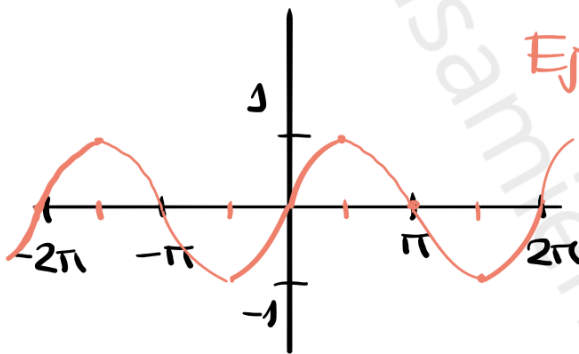
Ejemplo:
 $y = x^3$

• Periodicidad

La periodicidad se determina en las funciones trigonométricas.

$$f(x) = f(x + kT)$$

$T \rightarrow$ período



Ejemplo: $y = \text{sen } x$

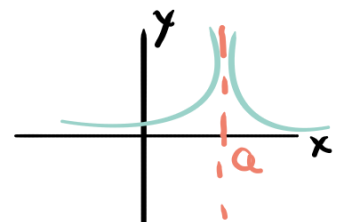
Período: $T = 2\pi$

• Asíntotas $y = f(x)$

ASÍNTOTA VERTICAL (A.V) en $x = a$ si:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$

(o bien, ambas).



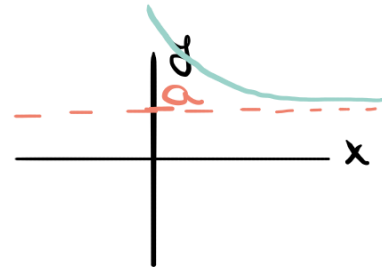
El punto a es un punto que nos ha dado problemas en nuestro dominio.

Por ejemplo, en una racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, el punto a será aquel número que anule $Q(x)$.

ASÍNTOTA HORIZONTAL (A.H.) en $y = a$ si:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

siendo a un nº real.



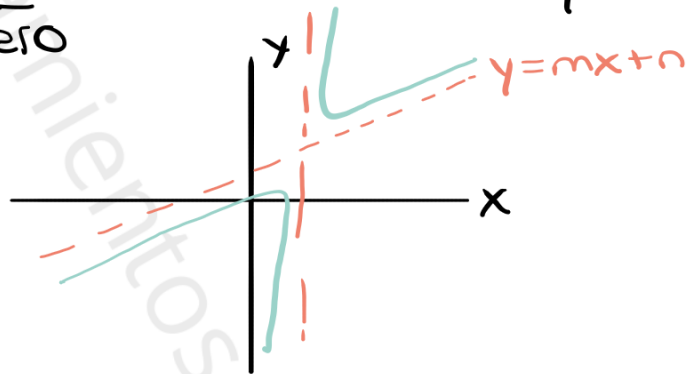
ASÍNTOTA OBLICUA (A.O.)

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

→ Debe darnos un nº real y distinto de cero

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$



Si hay A.H entonces no va a haber A.O. !

Monotonía

$y = f(x)$ es **CRECIENTE** en un intervalo (a,b) si:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

$y = f(x)$ es **DECRECIENTE** en un intervalo (a,b) si:

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ es **CONSTANTE**.

¿Cómo estudiar la monotonía?

- 1º Calculamos $f'(x)$
- 2º Hacemos $f'(x) = 0$ para ver los puntos que la anulan
- 3º Estudiamos el signo de $f'(x)$ en esos intervalos

• máximos y mínimos

Si $f(x)$ pasa de creciente a decreciente en $x=a$ entonces tendrá un **máximo relativo en $x=a$** .
y si pasa de decreciente a creciente en $x=a$ tendrá un **mínimo relativo en $x=a$** .

• Curvatura

Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es **CONVEXA** 

Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es **CONCAVA** 

¿Cómo estudiar la curvatura?

- 1º Calculamos $f''(x)$.
- 2º Hacemos $f''(x) = 0$.
- 3º Estudiamos el signo de $f''(x)$ en los intervalos obtenidos.

• Puntos de inflexión

- Si la curvatura pasa de cóncava a convexa (o viceversa) en $x=a$, entonces habrá un punto de inflexión en $x=a$.
- Calculamos $f'''(x)$ y si $f'''(a) \neq 0$, entonces habrá un punto de inflexión en $x=a$.

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$$

Vamos a hacer su estudio completo y a representarla gráficamente.

① Dominio e imagen

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\} \quad (\text{ya que el 0 anula el denominador})$$

$$\text{Im } f(x) = \mathbb{R}$$

② Puntos de corte

$$\bullet \text{ Eje } OX \quad y=0 \rightarrow 0 = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$\rightarrow \hookrightarrow \boxed{x=1, x=-2 \text{ (doble)}} \\ (\text{Calculadora})$$

Puntos de corte eje OX: $(1,0)$ y $(-2,0)$

• Eje OY: $x=0 \Rightarrow f(x) = \frac{0+0-4}{0} \neq$

No hay puntos de corte con el eje OY

3º Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)^2 - 4}{(-x)^2} =$$

$$= \frac{-x^3 + 3x^2 - 4}{x^2} \quad \begin{array}{l} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{array}$$

luego no tiene simetría

Tampoco es Periódica (no es trigonométrica)

4º Asíntotas

A.V.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2} = +\infty$$

luego, hay A.V en $x=0$

A.H

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2} = -\infty$$

Luego, NO hay A.H.

Como no hay A.H, podemos estudiar la existencia de A.O.

A.O $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 4 - x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 4}{x^2} \right) = 3$$

Luego, hay A.O : $y = x + 3$

5° monotonía

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$$

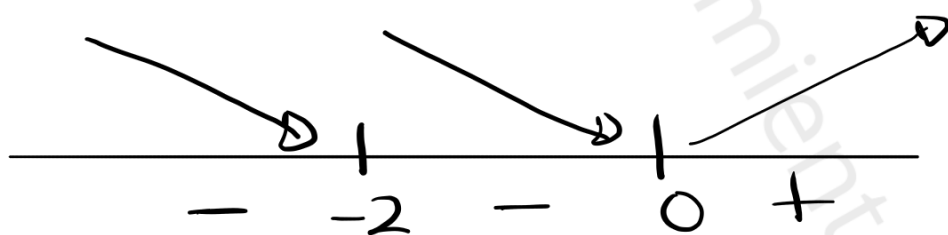
$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x)x^2 - (x^3 + 3x^2 - 4)2x}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^4 + 6x^3 - (2x^4 + 6x^3 - 8x)}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^4 + \cancel{6x^3} - 2x^4 - \cancel{6x^3} + 8x}{x^4} = \frac{x^4 + 8x}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^3 + 8) = 0$$

$$\begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=-2} \end{cases}$$



Signo $f'(x)$

$$\left. \begin{aligned} f'(-3) &< 0 \\ f'(-1) &< 0 \\ f'(1) &> 0 \end{aligned} \right\}$$

Decreciente en $(-\infty, 0)$

Creciente en $(0, \infty)$

No hay máximos o mínimos

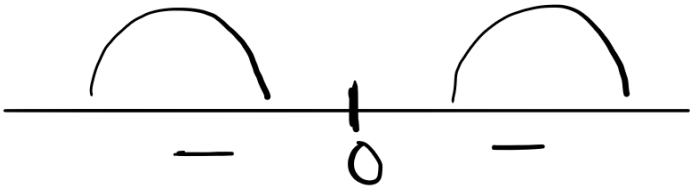
(el 0 no está en el Dom $f(x)$)

6° Curvatura

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 8)x^4 - 4x^3(x^4 + 8x)}{x^8} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^7} + 8x^4 - \cancel{4x^7} - 32x^4}{x^8} = \frac{-24x^4}{x^8}$$

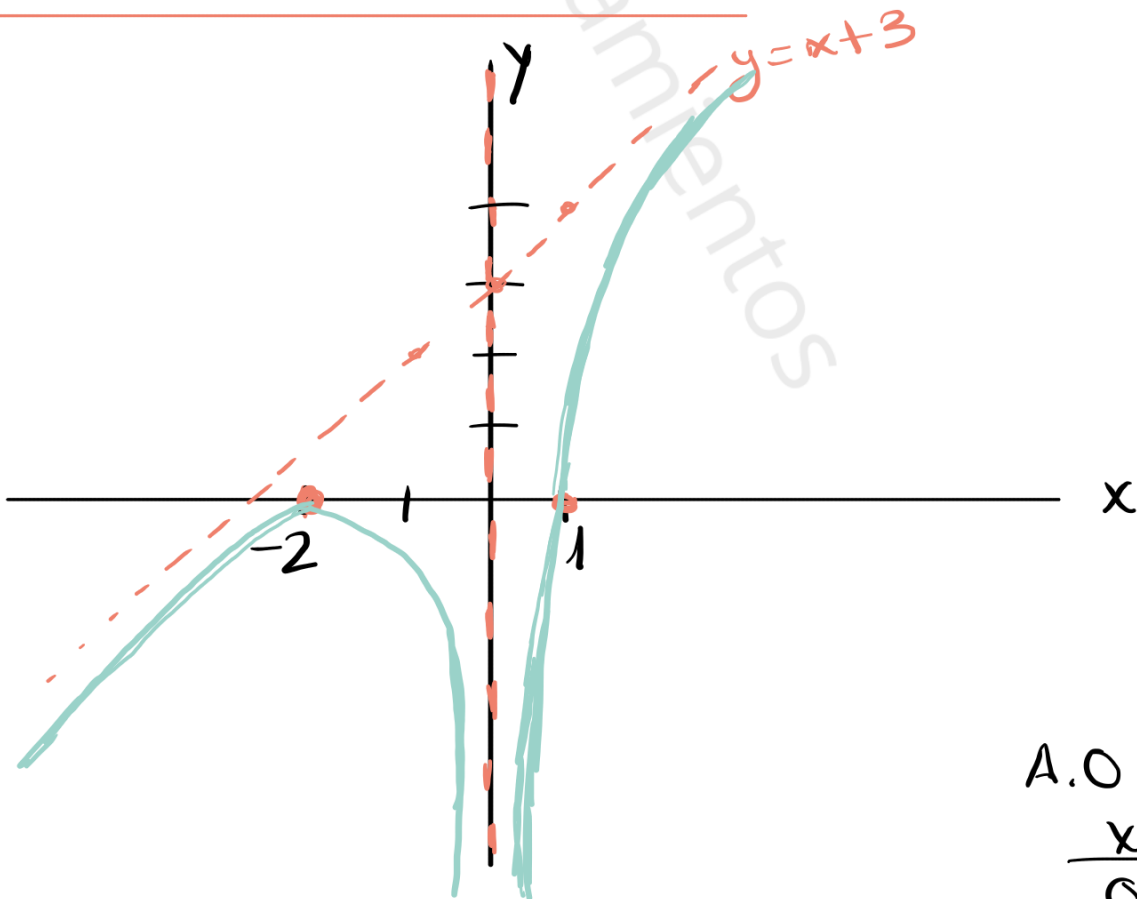
$$f''(x) = 0 \Rightarrow -24x^4 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$



Signo $f''(x)$

$\left. \begin{array}{l} f''(-1) < 0 \\ f''(1) < 0 \end{array} \right\}$ La función es cóncava ($\cap$) en todo su dominio.
 $\hookrightarrow$ No hay puntos de inflexión

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



A.O $y = x + 3$

x	y
0	3
-1	2
1	4